Проблемы физики, математики и техники, № 1 (34), 2018

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ θ-ПОДГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ ФОРМАЦИОННЫЕ РАДИКАЛЫ

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия

INTERSECTIONS OF MAXIMAL θ-SUBGROUPS CONTAINING FORMATION RADICALS

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies

Для непустых радикальных формаций $\mathfrak{F}$ и абнормально полного подгруппового m_s-функтора θ изучаются пересечения $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$ всех максимальных θ-подгрупп конечной группы G, содержащих $G_{\mathfrak{F}}$.

Ключевые слова: *радикальные формации конечных групп*, $\mathfrak{F}$*-радикалы*, *подгрупповой m-функтор*, *пересечения максимальных* θ*-подгрупп.*

Intersections $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$ of all maximal θ-subgroups of a finite group G, containing $G_{\mathfrak{F}}$, for nonempty radical formations $\mathfrak{F}$ and the abnormally full subgroup m_s-functor θ are studied.

Keywords: *radical formations of finite groups*, $\mathfrak{F}$*-radicals*, *subgroup m-functor*, *intersections of maximal* θ*-subgroups.*

1 Предварительные сведения и результаты

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1]. Изучение пересечений максимальных подгрупп с привлечением функторного метода восходит к работе [2]. Под подгрупповым *m*-функтором понимают всякое отображение θ, которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества $\theta(G)$ называют θ-подгруппами группы G, через $\Phi_\theta(G)$ обозначают пересечение всех θ-подгрупп группы G; $\mathrm{M}_\theta(G)$ − множество всех максимальных θ-подгрупп группы G. Подгрупповой *m*-функтор θ, обладающий свойством: если $H \in \theta(G)$, то $H^x \in \theta(G)$ для всех $x \in G$, будем называть подгрупповым m_s-функтором [3], [4]. Подгрупповой *m*-функтор θ называется регулярным, если для любой нормальной подгруппы N группы G выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ всегда следует
$$HN/N \in \theta(G/N);$$

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$.

Подгрупповой *m*-функтор θ называют абнормально полным, если для любой группы G множество $\theta(G)$ включает все абнормальные (ненормальные) максимальные подгруппы группы G.

Определения регулярного и абнормально полного подгруппового *m*-функтора θ в смысле подгруппового m_s-функтора приводились и использовались в работах [5], [6].

Пусть θ − подгрупповой *m*-функтор, G − группа, N_1, N_2 и N − нормальные подгруппы группы G. Обозначаем:

$\mathrm{M}(G)$ − множество всех максимальных подгрупп группы G;

$\Phi_{N_1,\overline{N_2}}(G)$ − пересечение всех максимальных подгрупп группы G, содержащих N_1, но не содержащих N_2;

$\mathrm{M}^{\mathfrak{N}}(G)$ − множество всех абнормальных максимальных подгрупп группы G;

$\mathrm{M}^{\mathfrak{N}}_N(G)$ − множество всех абнормальных максимальных подгрупп группы G, содержащих N;

$\Delta(G)$ − подгруппа Гашюца, пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G;

$\Delta_N(G)$ $(\Delta_{\overline{N}}(G))$ − пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G, содержащих N (не содержащих N, ответственно);

$\Delta_{N_1,\overline{N_2}}(G)$ − пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G, содержащих N_1, но не содержащих N_2;

$\mathrm{M}_{\theta,N_1}(G)$ $(\mathrm{M}_{\theta,\overline{N_1}}(G))$ − множество всех максимальных θ-подгрупп группы G, содержащих N_1 (не содержащих N_1, соответственно);

$\Phi_{\theta,N_1}(G)$ $(\Phi_{\theta,\overline{N_1}}(G))$ − пересечение всех групп из $\mathrm{M}_{\theta,N_1}(G)$ (из $\mathrm{M}_{\theta,\overline{N_1}}(G)$, соответственно);

$\Phi_{\theta,N_1,\overline{N_2}}(G)$ − пересечение всех максимальных θ-подгрупп группы G, содержащих N_1, но не содержащих N_2;

$\tilde{\mathrm{F}}_N(G)/N = Soc(G/N)$; в случае $N = \Phi(G)$ принято обозначение $\tilde{\mathrm{F}}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$ [1, с. 79].

В статье встречаются общепринятые обозначения: $\mathfrak{S}$ − формация всех разрешимых групп; $\mathfrak{N}_\pi$ − формация всех нильпотентных π-групп, $\mathfrak{N}^*$ − формация всех квазинильпотентных групп, $\mathrm{F}^*(G)$ − квазинильпотентный радикал группы G. Обозначим через $\mathfrak{M}$ некоторое множество линейных упорядочений множества всех простых чисел, через $\mathfrak{F}_\varphi$ − формацию всех φ-дисперсивных групп, $\varphi \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{M}} = \bigcap_{\varphi\in\mathfrak{M}} \mathfrak{F}_\varphi$ − радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, θ − подгрупповой m_s-функтор. Используем обозначения $\tilde{\mathrm{F}}_N(G) \in \{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\theta}(G), \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}}(G), \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G), \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G), \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G), \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)\}$ в соответствующих случаях для $N \in \{\Phi_\theta(G), \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G), \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G), \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G), \Delta(G), \Phi_{\mathrm{F}(G)}(G)\}$. В обозначениях пересечений максимальных подгрупп группы G вместо $\mathrm{F}(G)$, $\mathrm{F}^*(G)$ и $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ в нижних индексах используются символы F, F^* и $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}$ (соответственно); например, $\Delta_{\mathrm{F}}(G)$, $\Delta_{\overline{\mathrm{F}}}(G)$, $\Delta_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G)$, $\Phi_{\theta,\mathrm{F},\overline{\mathrm{F}^*}}(G)$, $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}}(G)$ обозначают $\Delta_{\mathrm{F}(G)}(G)$, $\Delta_{\overline{\mathrm{F}(G)}}(G)$, $\Delta_{\mathrm{F}(G),\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G)$, $\Phi_{\theta,\mathrm{F}(G),\overline{\mathrm{F}^*(G)}}(G)$, $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)}(G)$, соответственно.

В случае отсутствия в группе G максимальных подгрупп, удовлетворяющих требуемым условиям, соответствующие пересечения полагаем совпадающими с G.

Приведём в виде леммы 1.1 некоторые используемые в статье утверждения.

***Лемма* 1.1.** (1) [7, лемма 1.1]. *Пусть M и K нормальные подгруппы группы G, $K \subseteq M$. Тогда* $\tilde{\mathrm{F}}_M(G)/K = \tilde{\mathrm{F}}_{M/K}(G/K)$.

(2) [8, лемма 3.3]. *Пусть A и B − нормальные подгруппы группы G, $A \subset B$. Тогда* $\tilde{\mathrm{F}}_A(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_B(G)$.

(3) [7, лемма 1.4]. *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots, \mathfrak{F}_n$ − непустые радикальные формации. Тогда*

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\ldots\mathfrak{F}_n = (\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\ldots\mathfrak{F}_{n-1})\,\mathfrak{F}_n, \quad n \geq 3.$$

(4) [7, лемма 2.4]. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ − непустые радикальные формации, G − группа. Тогда* $(G/G_{\mathfrak{F}_1})_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2}/G_{\mathfrak{F}_1}$.

(5) [7, лемма 2.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация, G − группа. Тогда*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}} = \Phi(G/G_{\mathfrak{F}});\ \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}.$$

Ввиду теоремы 13.8 X из [9] и леммы 4.14 A из [10] справедливо следующее утверждение.

(6) [11, с. 155]. *Если в группе G подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, то $Soc(G) = \mathrm{F}^*(G)$.*

(7) [8, следствие 3.2.1 теоремы 3.2]. *Для всякой группы G справедливо равенство* $\tilde{\mathrm{F}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)$.

Доказательство. (7) Пусть G − нильпотентная группа. Тогда по определению $\Delta(G) = G$, $\tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G) = G$, $\tilde{\mathrm{F}}(G) = \mathrm{F}(G) = G$. Поэтому считаем, G − ненильпотентная группа. Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $G/\Phi(G)$ ненильпотентна ввиду локальности формации $\mathfrak{N}$. Обозначим $G/\Phi(G) = \overline{G}$. По индукции $\tilde{\mathrm{F}}(\overline{G}) = \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(\overline{G})$. Так как $\Delta(\overline{G}) = \Delta(G)/\Phi(G)$, то $Soc(\overline{G}/\Delta(\overline{G})) \cong Soc(G/\Delta(G)) = \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)/\Delta(G)$. С другой стороны, $Soc(\overline{G}/\Delta(\overline{G}) = \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(\overline{G})/\Delta(\overline{G})$. Значит, $\tilde{\mathrm{F}}_\Delta(\overline{G})/\Delta(\overline{G}) \cong \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)/\Delta(G)$. Так как $\tilde{\mathrm{F}}(\overline{G})/\Phi(\overline{G}) = Soc(\overline{G}/\Phi(\overline{G}))$, $\Phi(\overline{G}) = 1$, то $\tilde{\mathrm{F}}(\overline{G}) = Soc(\overline{G}) = \tilde{\mathrm{F}}(G)/\Phi(G)$, а потому $\tilde{\mathrm{F}}(\overline{G})/\Delta(\overline{G}) \cong \tilde{\mathrm{F}}(G)/\Delta(G)$. Ввиду индуктивного предположения $\tilde{\mathrm{F}}(\overline{G})/\Delta(\overline{G}) = \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(\overline{G})/\Delta(\overline{G})$; значит, $\tilde{\mathrm{F}}(G)/\Delta(G) \cong \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)/\Delta(\mathrm{G})$. А так как, согласно утверждению (2), $\tilde{\mathrm{F}}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)$, то $\tilde{\mathrm{F}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)$. Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда $\mathrm{F}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G) = Soc(G)$. По теореме Гашюца [1, теорема 8.8] $\Delta(G) = Z(G)$. Докажем справедливость включения $\tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G)$.

Пусть $\overline{\overline{N}} = N/Z(G)$ − минимальная нормальная подгруппа группы $G/Z(G)$. Если $\overline{\overline{N}}$ − абелева группа, то N нильпотентна, и

$$N \subseteq \mathrm{F}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G).$$

Пусть $\overline{\overline{N}}$ − неабелева группа. Если $Z(G) = 1$, то $\overline{\overline{N}} = N \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G)$. Пусть $Z(G) \neq 1$. Тогда $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{N}}_1 \times \overline{\overline{N}}_2 \times \ldots \times \overline{\overline{N}}_k$, $\overline{\overline{N}}_i = N_i/Z(G)$ − простая неабелева группа, $\overline{\overline{N}}_i \cong \overline{\overline{N}}_j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Понятно, что N_i централизует каждый свой главный фактор из $Z(G)$. Кроме того, для главного в N_i фактора $N_i/Z(G)$, конечно, справедливо равенство $N_i = N_i C_{N_i}(N_i/Z(G))$. Следовательно,

N_i − квазинильпотентная субнормальная подгруппа группы G. Так как формация $\mathfrak{N}^*$ является радикальной, то, согласно следствию 7.7.2 теоремы 7.7 из [1], $N_i \subseteq \mathrm{F}^*(G)$. Так как $\Phi(G)=1$, то по утверждению (6) $\tilde{\mathrm{F}}(G)=\mathrm{F}^*(G)$. Следовательно, $N_1N_2...N_k = N \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G)$.

Так как $\tilde{\mathrm{F}}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)$, то $\tilde{\mathrm{F}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_\Delta(G)$. □

2 Основные результаты

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация, G − группа. Имеют место следующие утверждения.*

I. $\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F} = \Delta(G/G_\mathfrak{F})$; $\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

II. *Если θ − абнормально полный подгрупповой m_s-функтор, то* $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

III. *Пусть θ − регулярный подгрупповой m-функтор, тогда $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F} = \Phi_\theta(G/G_\mathfrak{F})$. Если при этом функтор θ является абнормально полным, то $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.*

Доказательство. I. Пусть $\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$. Тогда равенство $\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F} = \Delta(G/G_\mathfrak{F})$ очевидно, и так как $\Delta(G/G_\mathfrak{F}) \in \mathfrak{N}$, то ввиду теоремы 2.1[1] $\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G) \in Ext_\mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Пусть $\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G) = G$, что возможно в следующих двух случаях.

1) $G = \mathrm{F}(G)$, т. е. в G нет ненормальных максимальных подгрупп, значит, нет таковых и в $G/G_\mathfrak{F}$. По определению, $\Delta(G/G_\mathfrak{F}) = G/G_\mathfrak{F} = \Delta_{G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F}$; $\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G) = G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

2) $G \neq \mathrm{F}(G)$, но каждая ненормальная максимальная подгруппа группы G не содержит $G_\mathfrak{F}$. Значит, группа $G/G_\mathfrak{F}$ (возможно, единичная) не имеет ненормальных максимальных подгрупп, и по определению $\Delta(G/G_\mathfrak{F}) = G/G_\mathfrak{F} = \mathrm{F}(G/G_\mathfrak{F})$; $\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G) = G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

II. Пусть θ − абнормально полный подгрупповой m_s-функтор. По определению, $\mathrm{M}^\mathfrak{N}(G) \subseteq \theta(G)$, а значит, $\mathrm{M}^\mathfrak{N}_{G_\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G)$, $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Delta_{G_\mathfrak{F}}(G)$. Так как θ − m_s-функтор, то группа $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G)$ нормальна в G. Следовательно, $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ ввиду утверждения I и S_n-замкнутости радикальной формации $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

III. Пусть θ − регулярный подгрупповой m-функтор. Докажем справедливость равенства $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F} = \Phi_\theta(G/G_\mathfrak{F})$. В случае $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$ доказываемое равенство очевидно. Пусть $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) = G$, что возможно в следующих двух случаях.

1) $\theta(G) = \{G\}$, что равносильно $\Phi_\theta(G) = G$. Тогда $\Phi_\theta(G/G_\mathfrak{F}) = G/G_\mathfrak{F}$ ввиду регулярности θ. Так как $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) = G$, то $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F} = \Phi_\theta(G/G_\mathfrak{F})$.

2) $\theta(G) \neq \{G\}$, что равносильно $\Phi_\theta(G) \neq G$. Таким образом, в G существуют максимальные θ-подгруппы и каждая из таких подгрупп не содержит $G_\mathfrak{F}$. Пусть при этом $G \neq G_\mathfrak{F}$. Тогда, ввиду регулярности θ, группа $G/G_\mathfrak{F}$ не имеет максимальных θ-подгрупп. По определению, $\Phi_\theta(G/G_\mathfrak{F}) = G/G_\mathfrak{F}$, что совпадает с $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F}$ ввиду рассматриваемого случая $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) = G$. Пусть $G = G_\mathfrak{F}$. Тогда $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F}$ − единичная группа. А так как $\Phi_\theta(1) = 1$, ибо $\theta(G) \supseteq \{G\}$ для любой группы G, то и в этом случае $\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F} = \Phi_\theta(G/G_\mathfrak{F})$.

При условии абнормальной полноты θ из замкнутости формации всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ относительно подгрупп теперь следует $\Phi_\theta(G/G_\mathfrak{F}) \subseteq \Delta(G/G_\mathfrak{F}) \in \mathfrak{N}$, а значит,

$$\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}. \qquad \square$$

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, G − группа. Имеют место следующие утверждения.*

(1) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_\mathfrak{F}}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_\mathfrak{F}}}(G)$.

(2) *Если θ − абнормально полный подгрупповой m_s-функтор, то*

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_\mathfrak{F}}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_\mathfrak{F}}}(G).$$

Доказательство. (1) Обозначим $G/G_\mathfrak{F} = \overline{G}$. Применяя утверждение (1) леммы 1.1 для $M = \Delta_{G_\mathfrak{F}}(G)$, $K = G_\mathfrak{F}$ и утверждение I леммы 2.1, имеем: $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_\mathfrak{F}}}(G)/G_\mathfrak{F} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F}}(\overline{G}) = \tilde{\mathrm{F}}_\Delta(\overline{G})$ − группа, совпадающая с $\tilde{\mathrm{F}}(\overline{G})$ по утверждению (7) леммы 1.1. Применение утверждения (5) леммы 1.1 и утверждения (1) леммы 1.1 для $M = \Phi_{G_\mathfrak{F}}(G)$, $K = G_\mathfrak{F}$ даёт

$$\tilde{\mathrm{F}}(\overline{G}) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G)/G_\mathfrak{F}}(\overline{G}) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_\mathfrak{F}}}(G)/G_\mathfrak{F}.$$

Следовательно, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_\mathfrak{F}}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_\mathfrak{F}}}(G)$.

(2) Так как функтор θ является абнормально полным, то

$$\mathrm{M}^\mathfrak{N}_{G_\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_{G_\mathfrak{F}}(G),$$

следовательно,

$$\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Phi_{\theta,G_\mathfrak{F}}(G) \subseteq \Delta_{G_\mathfrak{F}}(G).$$

Ввиду утверждения (2) леммы 1.1 и нормальности подгруппы $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$ в G

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Из утверждения (1) теперь следует

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G). \qquad \square$$

***Следствие* 2.2.1** [3, следствие 1.2.2(2) леммы 1.2]. *Пусть* θ − *абнормально полный подгрупповой* m_s *-функтор*, G − *группа. Тогда*

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_\theta}(G) = \tilde{\mathrm{F}}(G) = \tilde{\mathrm{F}}_{\Delta}(G).$$

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ − *непустые радикальные формации*, θ − *подгрупповой* m_s *-функтор. Тогда* $(\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G))_{\mathfrak{F}_2}$ *для любой группы G*.

Доказательство. Если $\theta(G) = \{G\}$, то $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G) = \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) = G$, и утверждение теоремы верно. Пусть $\theta(G) \neq \{G\}$, а значит, $G \neq 1$. И предположим, что $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G) = G$, т. е. в неединичной группе G нет максимальных θ -подгрупп, содержащих $G_{\mathfrak{F}_1}$. Тогда в G нет и ни одной максимальной θ -подгруппы, которая бы содержала $G_{\mathfrak{F}_1}$, но не содержала $G_{\mathfrak{F}_2}$. Согласно определению, $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) = G$. Значит, в этом случае утверждение теоремы выполняется.

Пусть $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G) \neq G$, а $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) = G$. Это означает, что в G существуют максимальные θ -подгруппы, содержащие $G_{\mathfrak{F}_1}$, и все они содержат $G_{\mathfrak{F}_2}$, откуда $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G) = \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G)$. Так как $G_{\mathfrak{F}_2} \subseteq \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G)$ и $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G)$ − нормальная подгруппа в G, то $(\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_2}$. А так как $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) = G$, то $(\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_2}$. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда нормальная в G подгруппа $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \neq G$. Очевидно,

$$(\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}_2} =$$

$$= (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \cap \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G)) \cap G_{\mathfrak{F}_2} =$$

$$= (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \cap \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G))_{\mathfrak{F}_2} = (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G))_{\mathfrak{F}_2},$$

т. к. $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}}(G) = \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G) \cap \Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}}(G)$. $\square$

***Следствие* 2.1.1** [4, теорема 2.2]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ − *радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп* $\mathfrak{N}$, θ − *абнормально полный подгрупповой* m_s *-функтор. Тогда*

$$\Phi_\theta(G) = \mathrm{F}(\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{F}}}(G)) = (\Phi_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = \mathrm{F}(\Phi_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))$$

для любой группы G.

Доказательство. Положим в условии теоремы 2.1 $\mathfrak{F}_1$ − единичная формация, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{X}$. Так как $\Phi_\theta(G) \subseteq \Delta(G) \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\Phi_\theta(G) = (\Phi_\theta(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}}$ по теореме 2.1. В частности, $\Phi_\theta(G) = \mathrm{F}(\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{F}}}(G))$. Значит, $\Phi_\theta(G) = \mathrm{F}(\Phi_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))$. $\square$

***Следствие* 2.1.2.** *Для всякой группы G и любой радикальной формации* $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию всех нильпотентных групп*,

$$\Delta(G) = \mathrm{F}(\Delta_{\overline{\mathrm{F}}}(G)) = (\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = \mathrm{F}(\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G)).$$

Соответствующие частные случаи следствий 2.1.1 и 2.1.2 имеют место для $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{N}^*, \mathfrak{S}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{M}}\}$.

Теорема 2.1 включает теорему 2.1 из [7] и её следствия 2.1.1 − 2.1.8, если для любой группы G и подгруппового m_s -функтора θ положить $\theta(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}(G)$. Из теоремы 2.1 и утверждения II леммы 2.1 вытекает также

***Следствие* 2.1.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация*, θ − *абнормально полный подгрупповой* m_s *-функтор*, G − *группа. Тогда*

$$\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G) = (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

***Следствие* 2.1.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация*, G − *группа. Тогда*

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Delta_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Применение леммы 1.1 (3) позволяет распространить следствие 2.1.3 теоремы 2.1 на произведение произвольного числа радикальных формаций $\mathfrak{F}_i$.

***Следствие* 2.1.5.** *Для любой группы G и абнормально полного подгруппового* m_s *-функтора* θ *имеют место следующие утверждения.*

(1) *Пусть* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, ..., \mathfrak{F}_{n-1}$ − *непустые радикальные формации. Тогда*

$$\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, *содержащей формацию* $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}$.

(2) *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация. Тогда*

$$\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} =$$

$$= (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}^{n-1}},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию $\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}$, и любого натурального числа n.

***Следствие* 2.1.6.** *Для любой группы G имеют место следующие утверждения.*

(1) *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, ..., \mathfrak{F}_{n-1}$ − непустые радикальные формации. Тогда*

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} =$$
$$= (\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}$.

(2) *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая радикальная формация. Тогда*

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} =$$
$$= (\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}$$

для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию $\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}$, и любого натурального числа n.

***Следствие* 2.1.7.** *Для всякой группы G, абнормально полного подгруппового m_s -функтора θ и любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию $\mathfrak{N}^n$, $n \geq 1$,*

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G))_{\mathfrak{N}^n} =$$
$$= (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^n}.$$

***Следствие* 2.1.8.** *Для всякой группы G и любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию $\mathfrak{N}^n$, $n \geq 1$,*

$$\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = (\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G))_{\mathfrak{N}^n} =$$
$$= (\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^n}.$$

***Следствие* 2.1.9.** *Для всякой группы G, абнормально полного подгруппового m_s -функтора θ и любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию всех метанильпотентных групп $\mathfrak{N}^2$,*

$$\Phi_{\theta,\mathrm{F}}(G) = (\Phi_{\theta,\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G))_{\mathfrak{N}^2} =$$
$$= (\Phi_{\theta,\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta,\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

В частности,

$$\Phi_{\theta,\mathrm{F}}(G) = (\Phi_{\theta,\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{S}} = (\Phi_{\theta,\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

***Следствие* 2.1.10.** *Для всякой группы G и любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию всех метанильпотентных групп $\mathfrak{N}^2$,*

$$\Delta_{\mathrm{F}}(G) = (\Delta_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G))_{\mathfrak{N}^2} = (\Delta_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

В частности,

$$\Delta_{\mathrm{F}}(G) = (\Delta_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{S}} = (\Delta_{\mathrm{F},\overline{G_{\mathfrak{S}}}}(G))_{\mathfrak{N}^2}.$$

***Следствие* 2.1.11.** *Для всякой группы G и абнормально полного подгруппового m_s -функтора θ справедливо равенство* $\mathrm{F}^*(\Phi_{\theta,\mathrm{F},\overline{\mathrm{F}^*}}(G)) = \mathrm{F}(G)$.

Доказательство. По теореме 2.1

$$\mathrm{F}^*(\Phi_{\theta,\mathrm{F},\overline{\mathrm{F}^*}}(G)) = \mathrm{F}^*(\Phi_{\theta,\mathrm{F}}(G)).$$

Так как по утверждению II леммы 2.1 $\Phi_{\theta,\mathrm{F}}(G) \in \mathfrak{N}^2$, а значит, группа $\Phi_{\theta,\mathrm{F}}(G)$ разрешима, то $\mathrm{F}^*(\Phi_{\theta,\mathrm{F}}(G)) = \mathrm{F}(\Phi_{\theta,\mathrm{F}}(G)) = \mathrm{F}(G)$. □

***Следствие* 2.1.12.** *Для всякой группы G справедливо равенство* $\mathrm{F}^*(\Delta_{\mathrm{F},\overline{\mathrm{F}^*}}(G)) = \mathrm{F}(G)$.

***Следствие* 2.1.13.** *Для всякой группы G, любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей формацию $\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$, и абнормально полного подгруппового m_s -функтора θ*

$$\Phi_{\theta,\mathrm{F}^*}(G) = (\Phi_{\theta,\mathrm{F}^*,\overline{G_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}} =$$
$$= (\Phi_{\theta,\mathrm{F}^*,\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Phi_{\theta,\mathrm{F}^*,\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}.$$

***Следствие* 2.1.14.** *Для любой радикальной формации $\mathfrak{X}$, содержащей $\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$, и всякой группы G*

$$\Delta_{\mathrm{F}^*}(G) = (\Delta_{\mathrm{F}^*,\overline{G_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}} =$$
$$= (\Delta_{\mathrm{F}^*,\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{X}} = (\Delta_{\mathrm{F}^*,\overline{G_{\mathfrak{X}}}}(G))_{\mathfrak{N}^*\mathfrak{N}}.$$

Полагая в теореме 2.1 $\mathfrak{F}_1$ − единичная формация, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$, получаем следующее следствие, учитывающее в частном случае (2) нильпотентность подгруппы $\Phi_\theta(G)$ ввиду $\theta(G) \supseteq \mathrm{M}^{\mathfrak{N}}(G)$.

***Следствие* 2.1.15.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, θ − абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, G − группа. Тогда*

$$(\Phi_\theta(G))_{\mathfrak{F}} = (\Phi_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}}.$$

В частности:

(1) *для любого простого числа p справедливо равенство* $\mathrm{O}_p(\Phi_\theta(G)) = \mathrm{O}_p(\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{O}_p(G)}}(G))$;

(2) $\mathrm{O}_\pi(\Phi_\theta(G)) = \mathrm{O}_\pi(\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G)) =$
$$= (\Phi_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{N}_\pi}}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi} = (\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi}$$

для произвольного множества простых чисел π; если, в частности, $\pi = \pi(\Phi_\theta(G))$, то

$$\Phi_\theta(G) = \mathrm{O}_\pi(\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G)) =$$
$$= (\Phi_{\theta,\overline{G_{\mathfrak{N}_\pi}}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi} = (\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi}.$$

***Следствие* 2.1.16.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, G − группа. Тогда*

$$(\Delta(G))_{\mathfrak{F}} = (\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{F}}}}(G))_{\mathfrak{F}}.$$

В частности:

(1) *для любого простого числа p справедливо равенство* $\mathrm{O}_p(\Delta(G)) = \mathrm{O}_p(\Delta_{\overline{\mathrm{O}_p(G)}}(G))$;

(2) $\mathrm{O}_\pi(\Delta(G)) = \mathrm{O}_\pi(\Delta_{\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G)) =$
$$= (\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{N}_\pi}}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi} = (\Delta_{\overline{\mathrm{O}_\pi(G)}}(G))_{\mathfrak{N}_\pi}$$

для произвольного множества простых чисел π; если, в частности, $\pi = \pi(\Delta(G))$, то

$$\Delta(G)=\mathrm{O}_{\pi}(\Delta_{\overline{\mathrm{O}_{\pi}(G)}}(G))=(\Delta_{\overline{G_{\mathfrak{N}_{\pi}}}}(G))_{\mathfrak{N}_{\pi}}=(\Delta_{\overline{\mathrm{O}_{\pi}(G)}}(G))_{\mathfrak{N}_{\pi}}.$$

Пусть подгрупповой m_s-функтор θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её абнормальные максимальные подгруппы. Тогда из теоремы 2.1 вытекает

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ *− непустые радикальные формации,* G *− группа. Тогда*

$$(\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1}}(G))_{\mathfrak{F}_2}=(\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1},\overline{G_{\mathfrak{F}_2}}}(G))_{\mathfrak{F}_2}.$$

Заметим, что следствия $2.1.2n$, $1\le n\le 8$, теоремы 2.1 вытекают также из теоремы 2.2 с применением утверждения I леммы 2.1.

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация,* G *− группа. Имеют место следующие утверждения.*

(1) [7] $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=\mathrm{F}^*(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$.

(2) [7] $\mathrm{F}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$;

$$G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

(3) $Soc(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=\mathrm{F}^*(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$.

(4) $\mathrm{F}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$.

Доказательство. Обозначим $G/G_{\mathfrak{F}}=\overline{G}$.

(3) Так как по утверждению I леммы 2.1 $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}}=\Delta(\overline{G})$, то $G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\cong\overline{G}/\Delta(\overline{G})$. Так как $\Phi(\overline{G}/\Delta(\overline{G}))\subseteq\Delta(\overline{G}/\Delta(\overline{G}))=1$, то по лемме 1.1 (6) $Soc(\overline{G}/\Delta(\overline{G}))=\mathrm{F}^*(\overline{G}/\Delta(\overline{G}))$. Значит,

$$Soc(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=\mathrm{F}^*(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)).$$

(4) Применяя утверждение I леммы 2.1 и следствие 3.2.4 теоремы 3.2 [12], имеем

$$\mathrm{F}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))\cong\mathrm{F}(\overline{G}/\Delta(\overline{G}))=\mathrm{F}(\overline{G})/\Delta(\overline{G})=$$
$$=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/G_{\mathfrak{F}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/G_{\mathfrak{F}}\cong G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$$

ввиду утверждения (4) леммы 1.1. А так как, очевидно, $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\mathrm{F}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$, то

$$\mathrm{F}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G). \qquad \square$$

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация,* θ *− абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор,* G *− группа. Имеют место следующие утверждения.*

(1) $Soc(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))=\mathrm{F}^*(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))$.

(2) $\mathrm{F}(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$.

(3) *Тогда и только тогда* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, *когда* $\mathrm{Soc}(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))$ *разрешим.*

Доказательство. (1) Пусть θ − абнормально полный подгрупповой m_s-функтор. По лемме 2.2 (2) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Так как $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$, то ввиду утверждения (1) леммы 2.3 $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\in\mathfrak{N}^*$. Предположим, что

$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\mathrm{F}^*(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))=R/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G).$$

Тогда R не входит в $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. А так как $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$, то

$$R\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\cong R/R\cap\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\in\mathfrak{N}^*,$$

и, следовательно, $R\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\mathrm{F}^*(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$. Из утверждения (3) леммы 2.3 следует $\mathrm{R}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства

$$Soc(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))=\mathrm{F}^*(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)).$$

(2) Пусть $\mathrm{F}(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))=N/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$. Так как $\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$, то из утверждения (2) леммы 2.3 следует $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\in\mathfrak{N}$, откуда $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subseteq N$. Кроме того, $N\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\in\mathfrak{N}$; ввиду утверждения (4) леммы 2.3 $N\subseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$. Значит, $N=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$.

Утверждение (3) вытекает из утверждений (1) и (2) с учётом утверждения (2) леммы 2.2. $\square$

Следствие 2.4.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация,* θ *− абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор,* G *− группа. Тогда следующие четыре утверждения:* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, $\mathrm{Soc}(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))$ *разрешим,* $\mathrm{Soc}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ *разрешим и* $\mathrm{Soc}(G/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ *разрешим − равносильны.*

Лемма 2.5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация,* θ *− абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор. Если факторгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима, то равносильны следующие три утверждения:*

(1) $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\ne G$;

(2) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\ne G$;

(3) $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\ne G$.

Доказательство. Докажем равносильность утверждений (1) и (3). Так как $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)$, то из утверждения (1) следует утверждение (3). Пусть выполняется утверждение (3), т. е. $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\ne G$, что равносильно

$$\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

И предположим, что $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)=G$. Тогда $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G)\supseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$. Согласно условию, факторгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=Soc(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешима. По утверждению (3) леммы 2.4 $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, что противоречит

$$\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Таким образом, из утверждения (3) следует утверждение (1).

Докажем равносильность утверждений (2) и (3). Так как $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)$, то из утверждения (2) следует утверждение (3). Пусть выполняется утверждение (3). Как было показано, утверждение (3) равносильно утверждению (1). А из утверждения (1) следует утверждение (2). Значит, утверждения (2) и (3) равносильны. □

***Замечание* 2.1.** Пусть θ − абнормально полный подгрупповой m-функтор, $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация. Справедливы следующие утверждения.

(1) Условие $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\neq G$ $(\Phi_{\theta}(G)\neq G$ в случае, если $\mathfrak{F}=\{1\})$ равносильно условию $G\neq G_{\mathfrak{F}}$ $(G\neq 1$, соответственно), если θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её максимальные подгруппы.

(2) Условие $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\neq G$ $(\Phi_{\theta}(G)\neq G$ в случае, если $\mathfrak{F}=\{1\})$ равносильно условию $G\neq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$ $(G\neq \mathrm{F}(G)$, соответственно), если θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её максимальные абнормальные подгруппы.

Действительно, если абнормально полный подгрупповой m-функтор θ выделяет в каждой группе G саму группу G и все её максимальные абнормальные подгруппы (случай (2)), то $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$. В соответствии с леммой 1.1 (4) $\mathrm{F}(G/G_{\mathfrak{F}})=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/G_{\mathfrak{F}}$. Поэтому условие $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)\neq G$, очевидно, равносильно условию $G\neq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$.

Таким образом, из леммы 2.5 вытекают следующие следствия.

***Следствие* 2.5.1** [7, лемма 2.6]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация*, G − *группа*, *и пусть факторгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима. Тогда равносильны следующие три утверждения*:

(1) $\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\neq G$;

(2) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\neq G$;

(3) $G\neq G_{\mathfrak{F}}$.

***Следствие* 2.5.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация*, G − *группа*, *и пусть факторгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Delta_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)/\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима. Тогда равносильны следующие три утверждения*:

(1) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\neq G$;

(2) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Delta_{G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\neq G$;

(3) $G\neq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$.

***Теорема* 2.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ − *непустая радикальная формация*, θ − *абнормально полный подгрупповой* m_s *-функтор*, G − *группа*, $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\neq G$. *Тогда*:

(1) $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$,

если факторгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима*;

(2) $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$,

если $Soc(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))$ *разрешим.*

Доказательство. (1) Пусть $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\neq G$, $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)\cap\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)=N$, факторгруппа $N/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима. Тогда

$$N/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq\mathrm{F}(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$$

ввиду леммы 2.4. Применение следствия 2.1.3 теоремы 2.1 даёт $N\subseteq(\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G))_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}=\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$. Значит, $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)\subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subseteq\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$, учитывая лемму 2.3 (2).

Утверждение (2) − частный случай утверждения (1); по лемме 2.4 (3) $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$. □

***Замечание* 2.2**. Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, G − группа, θ − абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. И пусть $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G)=G$. Тогда

$$G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subseteq\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}(G)=\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Значит, $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}\subset G$, так как $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subseteq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$ по лемме 2.1(II). Таким образом, согласно лемме 2.4 (2), $\mathrm{F}(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))=G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$ − единичная группа, а значит, по лемме 2.4 (1) $Soc(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))=\mathrm{F}^{*}(G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G))$ − прямое произведение простых неабелевых групп.

Отметим следствие теоремы 2.3 для случая $\mathfrak{F}$ − единичная формация.

***Следствие* 2.3.1.** *Пусть* θ − *абнормально полный подгрупповой* m_s *-функтор*, G − *группа*, $\Phi_{\theta}(G)\neq G$. *Тогда*:

(1) $\Phi_{\theta}(G)=\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{F}}}(G)\subset\mathrm{F}(G)\subseteq\tilde{\mathrm{F}}(G)$,

если подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}(G)\cap\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{F}}}(G)$ *разрешима;*

(2) $\Phi_{\theta}(G)=\Phi_{\theta,\overline{\mathrm{F}}}(G)\subset\mathrm{F}(G)=\tilde{\mathrm{F}}(G)$,

если подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ *разрешима.*

Применяя лемму 1.1 (3), распространим теорему 2.3 на произведение произвольного числа радикальных формаций $\mathfrak{F}_i$.

***Следствие* 2.3.2.** *Пусть* θ *− абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор,* G *− группа. Имеют место следующие утверждения.*

I. *Пусть* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ *− непустые радикальные формации,* $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) \neq G$*. Тогда*:

(1) $$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset$$
$$\subset G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G),$$

если факторгруппа
$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \Big/ \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$$
разрешима;

(2) $$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset$$
$$\subset G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G),$$

если $Soc(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G))$ *разрешим.*

II. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация,* $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) \neq G$*,* n *− натуральное число. Тогда*:

(1) $$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset$$
$$\subset G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G),$$

если факторгруппа
$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \Big/ \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G)$$
разрешима;

(2) $$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} =$$
$$= \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G),$$ *если* $Soc(G/\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G))$ *разрешим.*

III. *Пусть* n *− натуральное число,* $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) \neq G$*. Тогда*:

(1) $$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^n} \subseteq$$
$$\subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G),$$ *если группа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G)$ *разрешима*;

(2) $$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^n} =$$
$$= \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G),$$ *если группа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)$ *разрешима.*

Утверждение III следствия 2.3.2 теоремы 2.3 учитывает разрешимость подгруппы $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G)$, принадлежащей формации $\mathfrak{N}^n$ согласно утверждению II леммы 2.1 и утверждению (3) леммы 1.1.

Из теоремы 2.3 вытекает следующий результат, ввиду следствия 2.5.1 леммы 2.5 равносильный теореме 2.2 из [7].

***Следствие* 2.3.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация,* G *− группа,* $G \neq G_{\mathfrak{F}}$*. Тогда*:

(1) $$\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G),$$

если факторгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \Big/ \Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ *разрешима*;

(2) $$\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G),$$

если $\mathrm{Soc}(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ *разрешим.*

В случае $\mathfrak{F} = \{1\}$ из следствия 2.3.3 теоремы 2.3 получаем следующее утверждение: $\Phi(G) = \Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G) \subset \mathrm{F}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G)$, если $G \neq 1$, подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}(G) \cap \Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G)$ разрешима; в частности, $\Phi(G) = \Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G) \subset \mathrm{F}(G) = \tilde{\mathrm{F}}(G)$, если подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ неединичной группы G разрешима. Это утверждение вытекает также из следствия 2.3.1 с учётом замечания 2.1(1). Для разрешимой неединичной группы G равенство $\Phi(G) = \Phi_{\overline{\mathrm{F}}}(G)$ установлено в [13].

В случае $\mathfrak{F}$ − формация всех нильпотентных групп из следствия 2.3.2 теоремы 2.3 с привлечением следствия 2.5.1 леммы 2.5 получаем утверждение: $\Phi_{\mathrm{F}}(G) = \Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^2} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)$, если $\Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \neq G$, подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G) \cap \Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G)$ разрешима; в частности, если группа G ненильпотентна и подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)$ разрешима, то $\Phi_{\mathrm{F}}(G) = \Phi_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^2} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)$. Метанильпотентность пересечения $\Phi_{\mathrm{F}}(G)$ для разрешимой ненильпотентной группы G была установлена в [13].

***Следствие* 2.3.4**. *Пусть* G *− группа. Имеют место следующие утверждения.*

I. *Пусть* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ *− непустые радикальные формации,* $G \neq G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}$*. Тогда*:

(1) $$\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset$$
$$\subset G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G),$$ *если факторгруппа*
$$\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \Big/ \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$$
разрешима;

(2) $$\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset$$
$$\subset G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G),$$ *если* $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G))$ *разрешим.*

II. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *− непустая радикальная формация,* $G \neq G_{\mathfrak{F}^{n-1}}$*,* n *− натуральное число. Тогда:*

(1) $$\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} \subseteq$$
$$\subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G),$$ *если факторгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G) \cap$
$$\cap \Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \Big/ \Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G)$$ *разрешима*;

(2) $$\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} =$$
$$= \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G),$$ *если* $Soc(G/\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G))$ *разрешим.*

Утверждение I следствия 2.3.4 теоремы 2.3 равносильно следствию 2.2.2 теоремы 2.2 [7] ввиду следствия 2.5.1 леммы 2.5. Следующий результат равносилен теореме 2.3 из [7].

***Следствие* 2.3.5.** *Пусть G − группа. Для всякого натурального числа n имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если $G \neq G_{\mathfrak{N}^{n-1}}$, подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G) \cap \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G)$ разрешима, то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^n} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G).$$

(2) *Если $G \neq G_{\mathfrak{N}^{n-1}}$ и подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)$ разрешима, то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = \Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^n} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G).$$

Полагая $\theta(G) = \{G\} \cup \mathrm{M}^{\mathfrak{N}}(G)$ для любой группы G, из теоремы 2.3, с учётом замечания 2.1, получаем

***Следствие* 2.3.6**. *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, G − группа, $G \neq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$. Тогда*:

(1) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$, *если факторгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) / \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)$ разрешима*;

(2) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}}, \overline{G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$, *если $Soc(G / \Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G))$ разрешим.*

***Следствие* 2.3.7**. *Пусть G − группа. Имеют место следующие утверждения.*

I. *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ − непустые радикальные формации, $G \neq G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}$. Тогда*:

(1) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset$ $\subset G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G)$, *если факторгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) / \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G)$ *разрешима*;

(2) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset$ $\subset G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}\mathfrak{N}} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}}(G)$, *если $Soc(G / \Delta_{G_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{n-1}}}(G))$ разрешим.*

II. *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, $G \neq G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}$, n − натуральное число. Тогда*:

(1) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} \subseteq$ $\subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G)$, *если факторгруппа* $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G) \cap$ $\cap \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) / \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G)$ *разрешима*;

(2) $\Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}}}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{N}} =$ $= \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}}(G)$, *если $Soc(G / \Delta_{G_{\mathfrak{F}^{n-1}}}(G))$ разрешим.*

Следствие 2.3.7 теоремы 2.3 включает следующий результат.

***Теорема* 2.4.** *Пусть G − группа. Для всякого натурального числа n имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если $G \neq G_{\mathfrak{N}^n}$ и подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G) \cap \Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G)$ разрешима, то*

$$\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^n} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G).$$

(2) *Если $G \neq G_{\mathfrak{N}^n}$ и подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G)$ разрешима, то*

$$\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^n} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G).$$

***Следствие* 2.4.1.** *Пусть G − ненильпотентная группа. Тогда*:

(1) *если подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}(G) \cap \Delta_{\overline{\mathrm{F}}}(G)$ разрешима, то $\Delta(G) = \Delta_{\overline{\mathrm{F}}}(G) \subset \mathrm{F}(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G)$*;

(2) *если подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ разрешима, то $\Delta(G) = \Delta_{\overline{\mathrm{F}}}(G) \subset \mathrm{F}(G) = \tilde{\mathrm{F}}(G)$.*

Следствие 2.4.1 вытекает также из следствия 2.3.1 теоремы 2.3 с учётом замечания 2.1(2).

***Следствие* 2.4.2.** *Пусть нильпотентная длина разрешимой группы G больше натурального числа n. Тогда*

$$\Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}(G) = \Delta_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}, \overline{G_{\mathfrak{N}^n}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^n} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{N}^{n-1}}}}(G).$$

***Следствие* 2.4.3** [14]. *Подгруппа Гашюца $\Delta(G)$ разрешимой ненильпотентной группы G совпадает с пересечением всех максимальных ненормальных подгрупп группы G, не содержащих её подгруппу Фиттинга $\mathrm{F}(G)$.*

Выделим случай теоремы 2.4, возникающий при $n = 2$.

***Следствие* 2.4.4.** *Пусть группа $G \neq G_{\mathfrak{N}^2}$. Тогда*:

(1) *если подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G) \cap \Delta_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G)$ разрешима, то $\Delta_{\mathrm{F}}(G) = \Delta_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^2} \subseteq \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)$*;

(2) *если подгруппа $\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G)$ разрешима, то*

$$\Delta_{\mathrm{F}}(G) = \Delta_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^2} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G).$$

***Следствие* 2.4.5.** *Пусть G − разрешимая группа, не являющаяся метанильпотентной. Тогда*

$$\Delta_{\mathrm{F}}(G) = \Delta_{\mathrm{F}, \overline{G_{\mathfrak{N}^2}}}(G) \subset G_{\mathfrak{N}^2} = \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\mathrm{F}}}(G).$$

***Теорема* 2.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ − непустая радикальная формация, G − группа. Имеют место следующие утверждения.*

I. *Пусть θ − абнормально полный подгрупповой m_s-функтор. Если $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$, то*

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}, \overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}}}(G) \subset \tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

II. *Если $G \neq G_{\mathfrak{F}}$, то*

$$\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{G_{\mathfrak{F}},\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi G_{\mathfrak{F}}}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

III. *Если* $G\neq G_{\mathfrak{F}\mathfrak{N}}$, *то*

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Delta_{G_{\mathfrak{F}},\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi G_{\mathfrak{F}}}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G).$$

Доказательство. I. Так как $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\neq G$, то $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}}(G)=\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi_{G_{\mathfrak{F}}}}(G)$ ввиду леммы 2.2 (2). Предположим, что $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)\subset\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi G_{\mathfrak{F}}}}}(G)$. Пусть $N/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$ − минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$, $N\subseteq\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi G_{\mathfrak{F}}}}}(G)$. Так как $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi G_{\mathfrak{F}}}}}(G)\cap\Phi_{\theta,\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi G_{\mathfrak{F}}}}(G)$, то $N\subseteq\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)$, что противоречит сделанному предположению. Значит, $\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}}}(G)=\Phi_{\theta,G_{\mathfrak{F}},\overline{\tilde{\mathrm{F}}_{\Phi G_{\mathfrak{F}}}}}(G)$. Утверждения II и III вытекают из утверждения I ввиду замечания 2.1. $\square$

Утверждение I теоремы 2.5 обобщает случай (2) теоремы 2.3, который вытекает из теоремы 2.5 с применением леммы 2.4 (3).

***Следствие* 2.5.1.** *Пусть G − группа. Имеют место следующие утверждения.*

I. *Пусть* θ − *абнормально полный подгрупповой* m_s*-функтор. Если* $\Phi_\theta(G)\neq G$, *то*

$$\Phi_\theta(G)=\Phi_{\theta,\overline{\tilde{\mathrm{F}}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}(G).$$

II. *Если* $G\neq 1$, *то* $\Phi(G)=\Phi_{\overline{\tilde{\mathrm{F}}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}(G)$.

III. *Если* $G\neq\mathrm{F}(G)$, *то* $\Delta(G)=\Delta_{\overline{\tilde{\mathrm{F}}}}(G)\subset\tilde{\mathrm{F}}(G)$.

Следствие 2.5.1 включает результаты работы [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. Навука, 2003. – 254 с.

3. *Белоконь*, *Л.М.* К вопросу о пересечениях максимальных θ-подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 46–50.

4. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных θ_π-подгрупп конечных групп и $\mathfrak{F}$-абнормально π'-полный подгрупповой *m*-функтор / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 50–58.

5. *Бородич*, *Е.Н.* О пересечениях $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весцi Нацыянальнай Акадэмii Навук Беларусi. − 2007. − № 3. − С. 47−52.

6. *Селькин*, *М.В.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / М.В. Селькин, Р.В. Бородич // Вестник СамГУ − Естественнонаучная серия. − 2009. − № 8 (74). − С. 67−76.

7. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп, содержащих формационные радикалы / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 36−42.

8. *Белоконь*, *Л.М.* О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.

9. *Huppert*, *B.* Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1982. – 454 p.

10. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

11. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 256 с.

12. *Белоконь*, *Л.М.* Нормальная факторизуемость субнормальной в конечной группе подгруппы в связи с локальными формациями и обобщёнными подгруппами Фраттини. Формационные радикалы / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 25–36.

13. *Монахов*, *В.С.* Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – № 4 (47). – С. 31–33.

14. *Монахов*, *В.С.* Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27) – С. 81.

15. *Васильев*, *А.Ф.* Заметка о пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыроквашин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 62–64.

Поступила в редакцию 12.08.17.